

Задача 5.4 (б)

Студент 303 группы ВМК МГУ
Чижигов Алексей

Дискретизация времени

Дан сигнал: $\xi(t) = \begin{cases} \frac{2a}{\tau}(t + \frac{\tau}{2}), & -\tau/2 < t < 0 \\ -\frac{2a}{\tau}(t - \frac{\tau}{2}), & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2 \end{cases}$

Произведём дискретизацию времени с шагом $h = \frac{\tau}{N}$

$$\xi_n(j) = \int_{h*j - \frac{h}{2}}^{h*j + \frac{h}{2}} \xi(t) dt$$

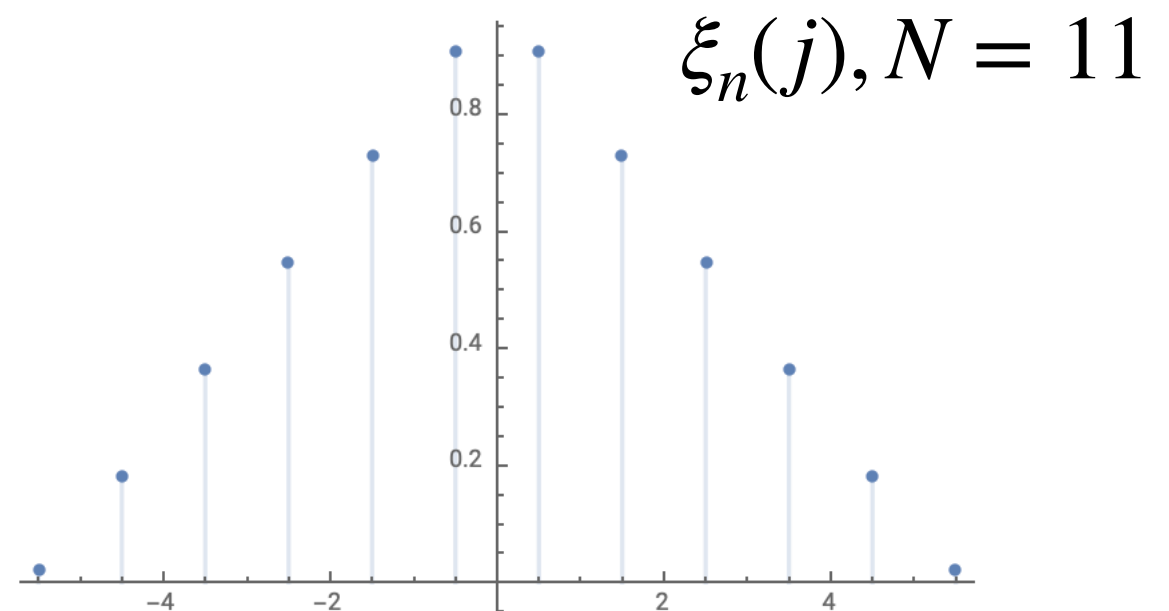
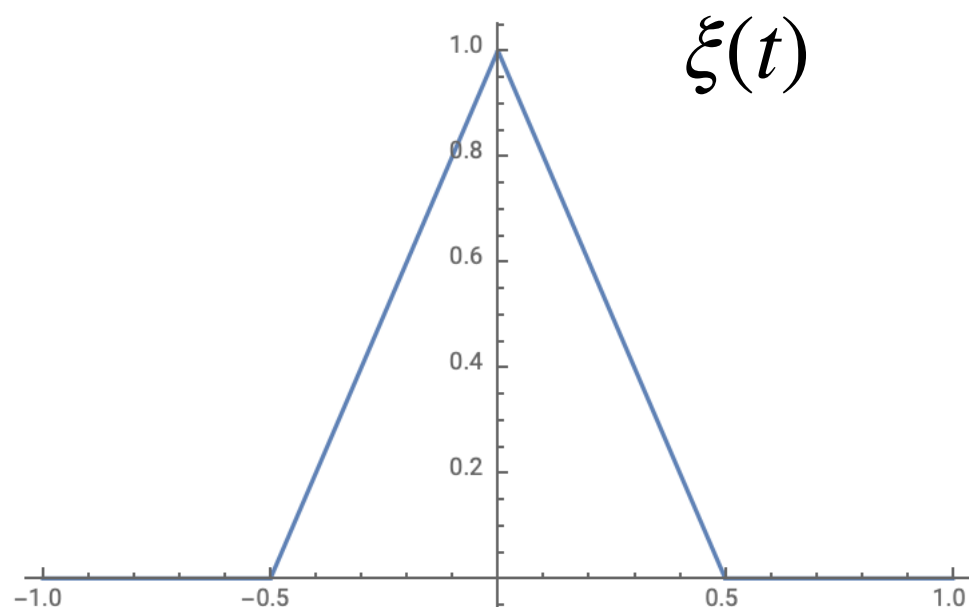
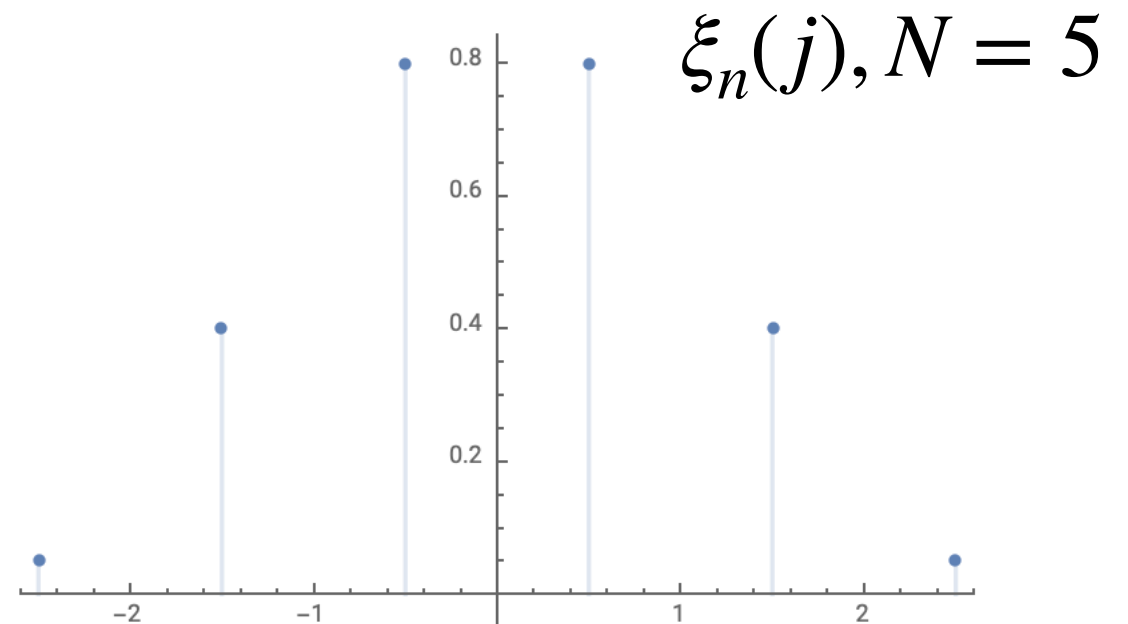
Получаем:

$$\xi_n(j) = \begin{cases} \frac{ah(2hj + \tau)}{\tau}, & -\tau/2 < t < 0 \\ \frac{ah(\tau - 2hj)}{\tau}, & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Дискретизация времени

$$\xi_n(j) = \begin{cases} \frac{ah(2hj + \tau)}{\tau}, & -\tau/2 < t < 0 \\ \frac{ah(\tau - 2hj)}{\tau}, & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$h = \frac{\tau}{N}$$



Дискретное преобразование Фурье

Формула вычисления спектра по сигналу:

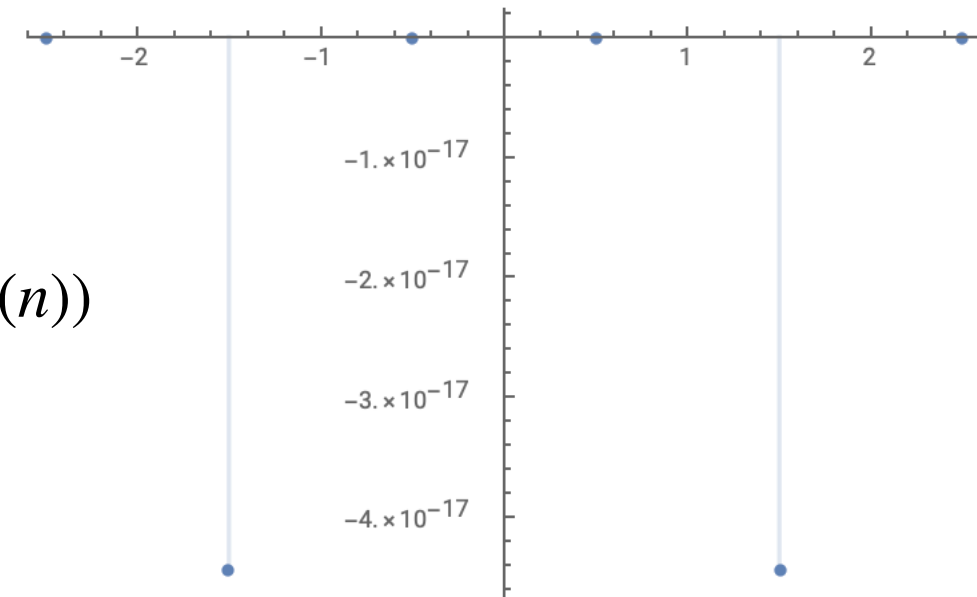
$$S_h(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi(j) W_N^{nj}, n = 1, 2, \dots, N$$

$$W_N = \exp(i \frac{2\pi}{N})$$

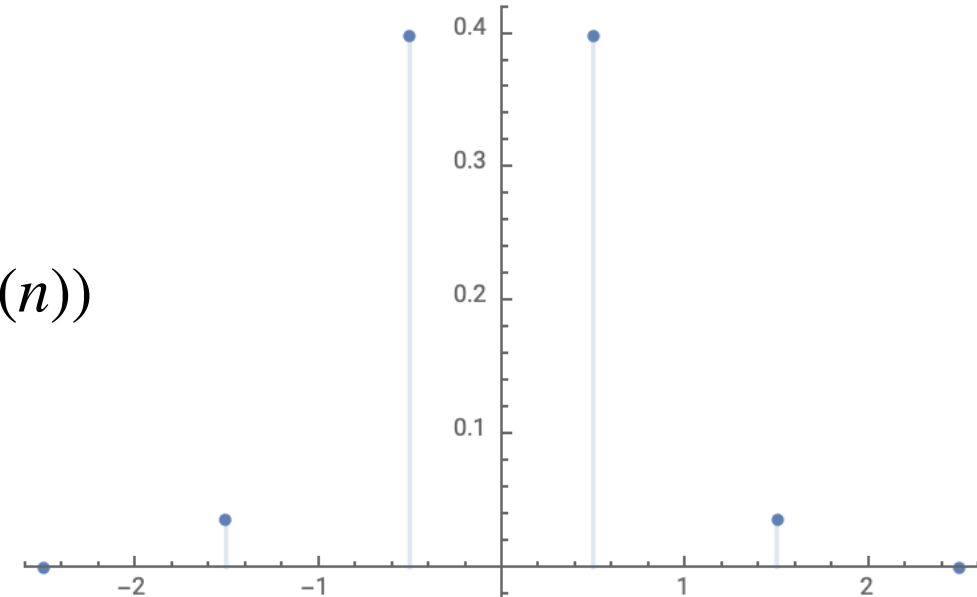
$$\xi_n(j) = \begin{cases} \frac{ah(2hj + \tau)}{\tau}, & -\tau/2 < t < 0 \\ \frac{ah(\tau - 2hj)}{\tau}, & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$N = 5$$

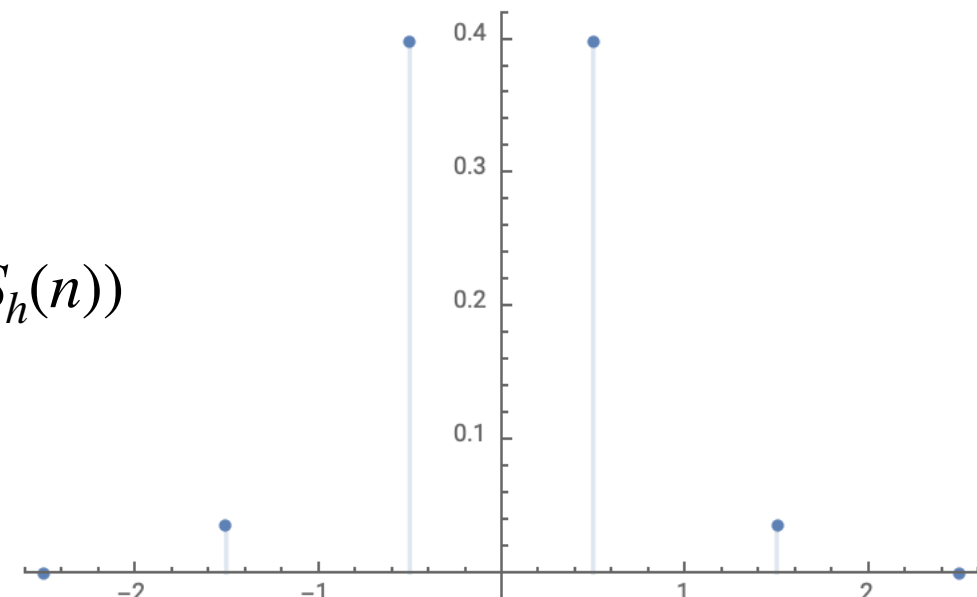
$Im(S_h(n))$



$Re(S_h(n))$



$Abs(S_h(n))$



Дискретное преобразование Фурье

Формула вычисления спектра по сигналу:

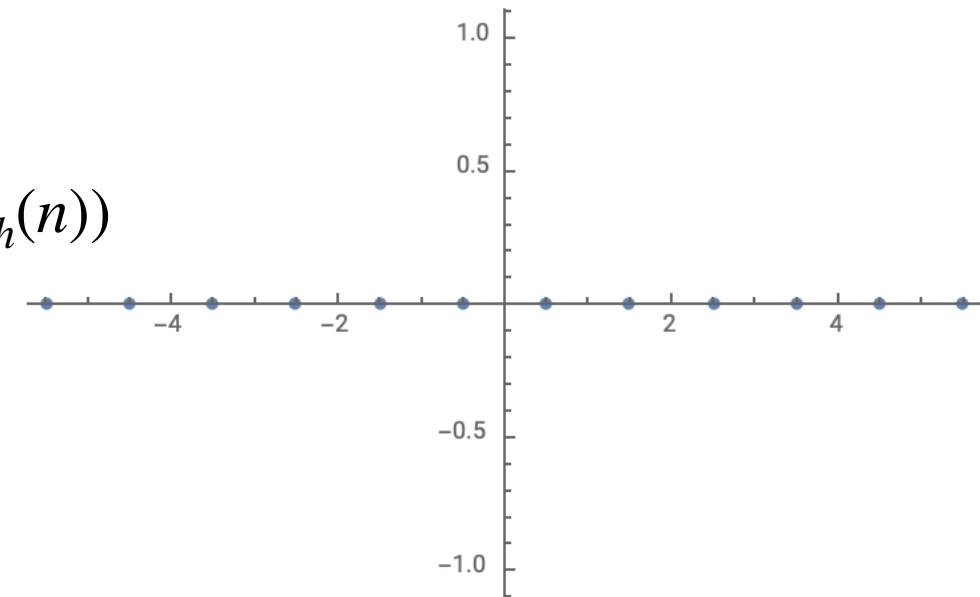
$$S_h(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi(j) W_N^{nj}, n = 1, 2, \dots, N$$

$$W_N = \exp(i \frac{2\pi}{N})$$

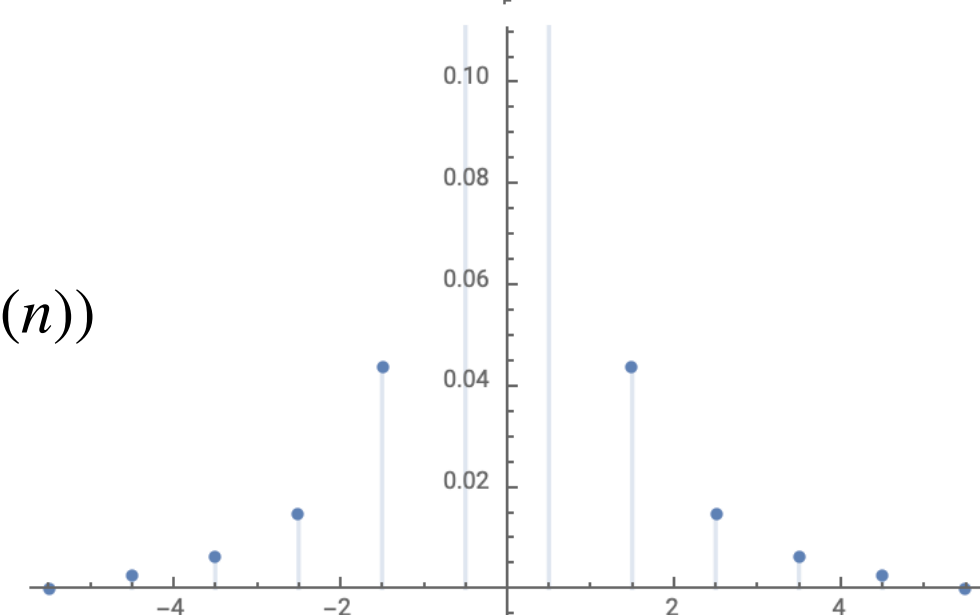
$$\xi_n(j) = \begin{cases} \frac{ah(2hj + \tau)}{\tau}, & -\tau/2 < t < 0 \\ \frac{ah(\tau - 2hj)}{\tau}, & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$N = 11$$

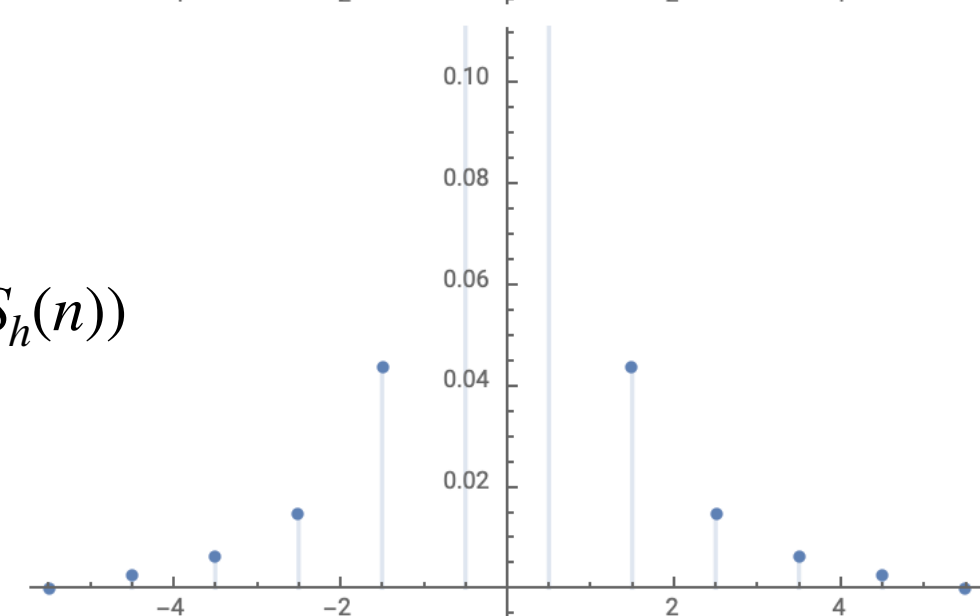
$Im(S_h(n))$



$Re(S_h(n))$



$Abs(S_h(n))$



Обратное преобразование Фурье

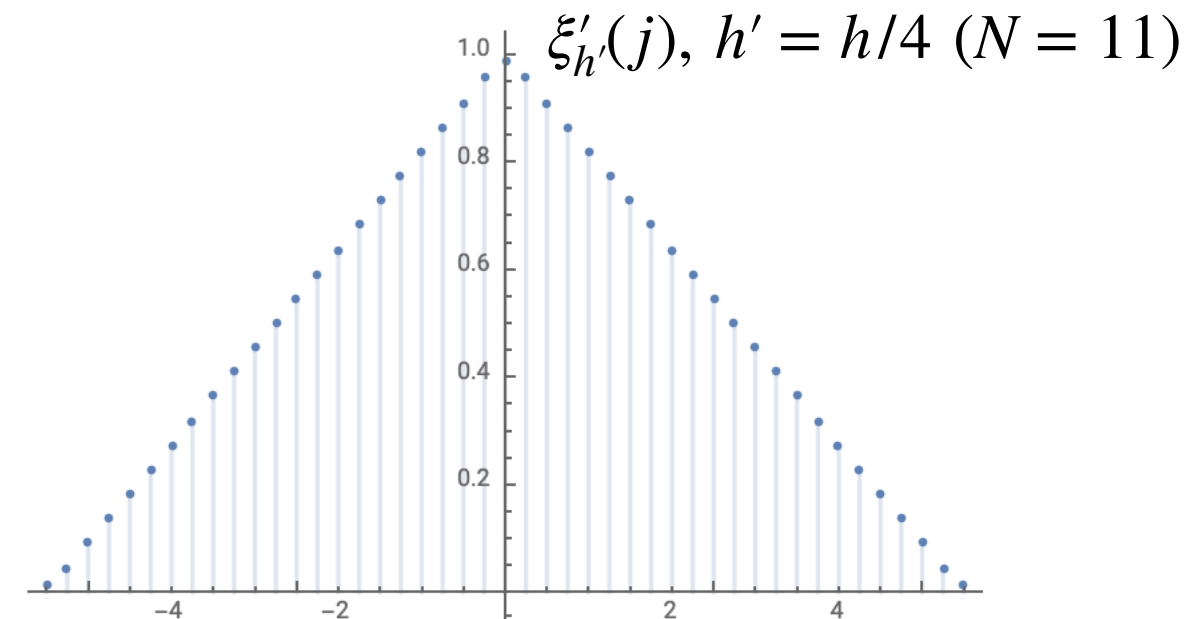
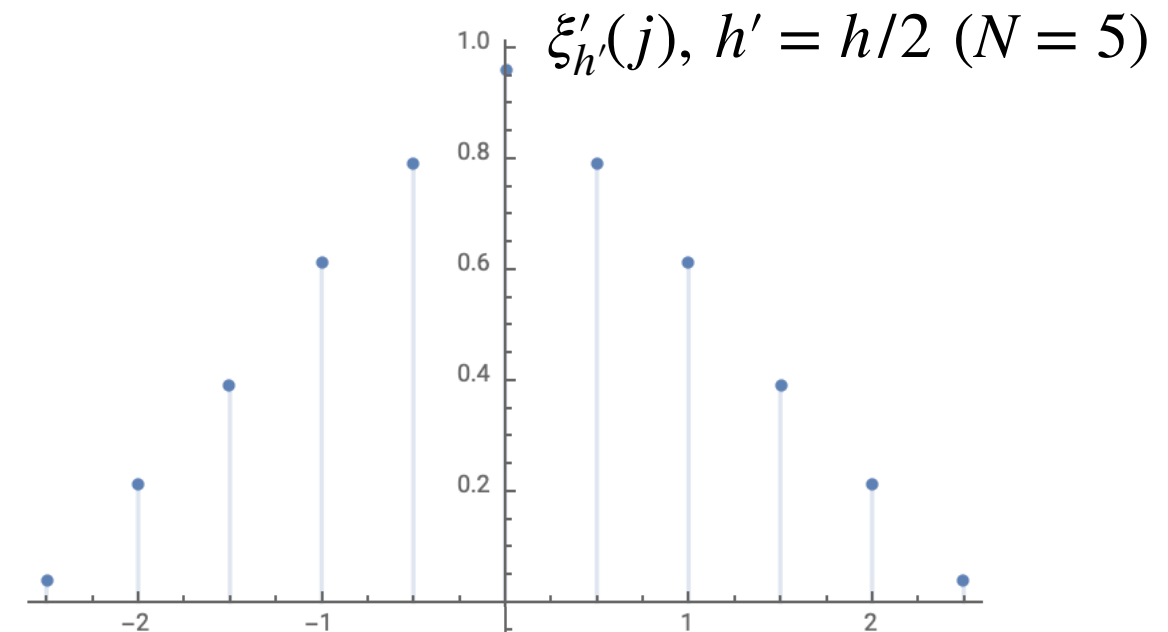
Формула вычисления сигнала по спектру:

$$\xi'_{h'}(j) = \sum_{n=1}^N S_{h'}(n) W_N^{-nj}, i = 1, 2, \dots, N$$

$$W_N = \exp(i \frac{2\pi}{N})$$

$$S_h(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi(j) W_N^{nj}, n = 1, 2, \dots, N$$

$$\xi_n(j) = \begin{cases} \frac{ah(2hj + \tau)}{\tau}, & -\tau/2 < t < 0 \\ \frac{ah(\tau - 2hj)}{\tau}, & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



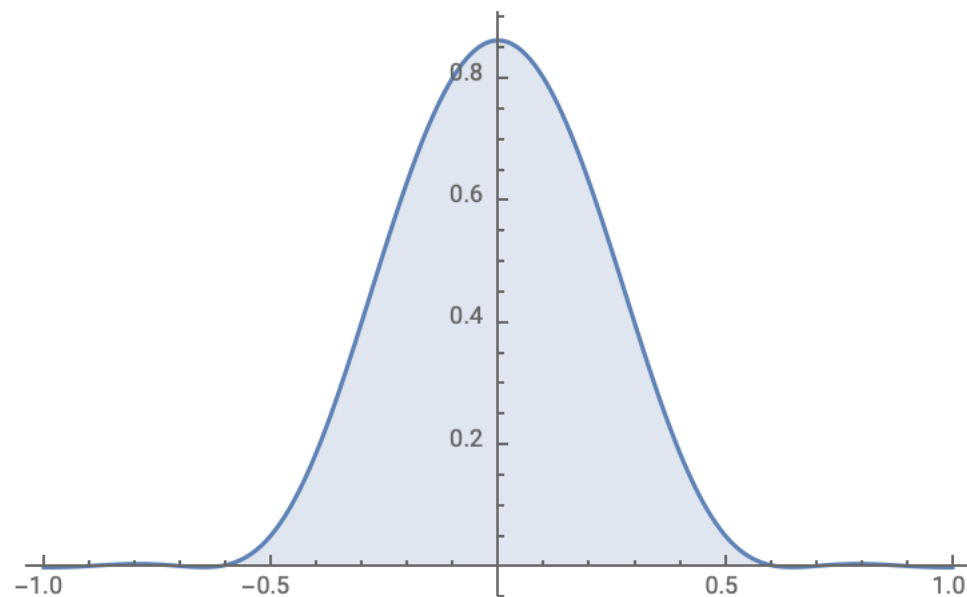
Восстановление сигнала

Для восстановления сигнала по $\xi'_{h'}(j)$
воспользуемся Теоремой Котельникова–Шеннона:

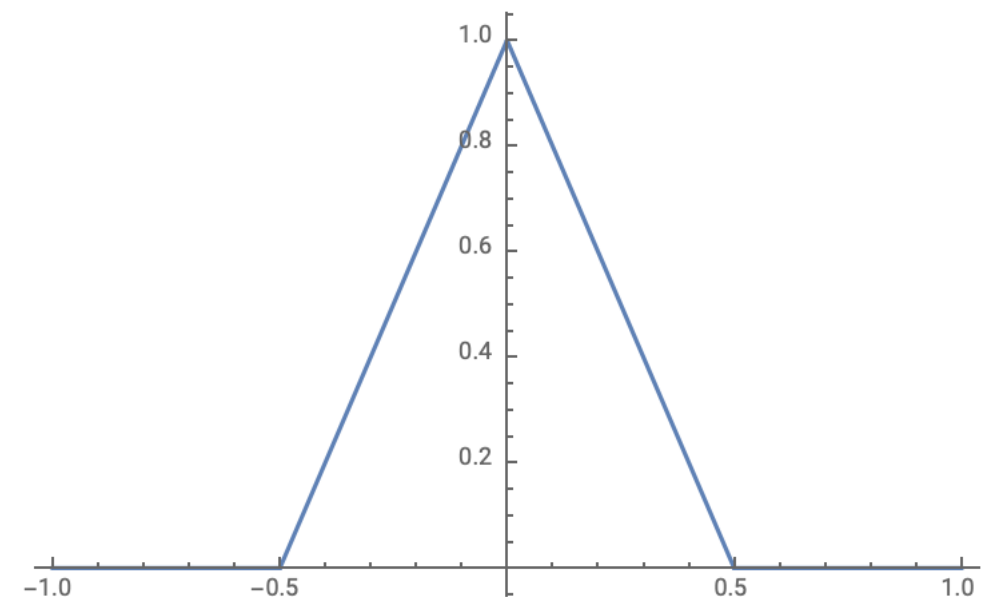
$$\xi'(t) = \sum_{j=1}^{N'} \xi'_{h'}(j) \operatorname{Sinc}\left(\frac{\pi}{h'}(t - h'j)\right)$$

Подставив вычисленные значения, получаем графики:

$\xi'(t), h' = h/2 (N = 5)$



$\xi(t)$



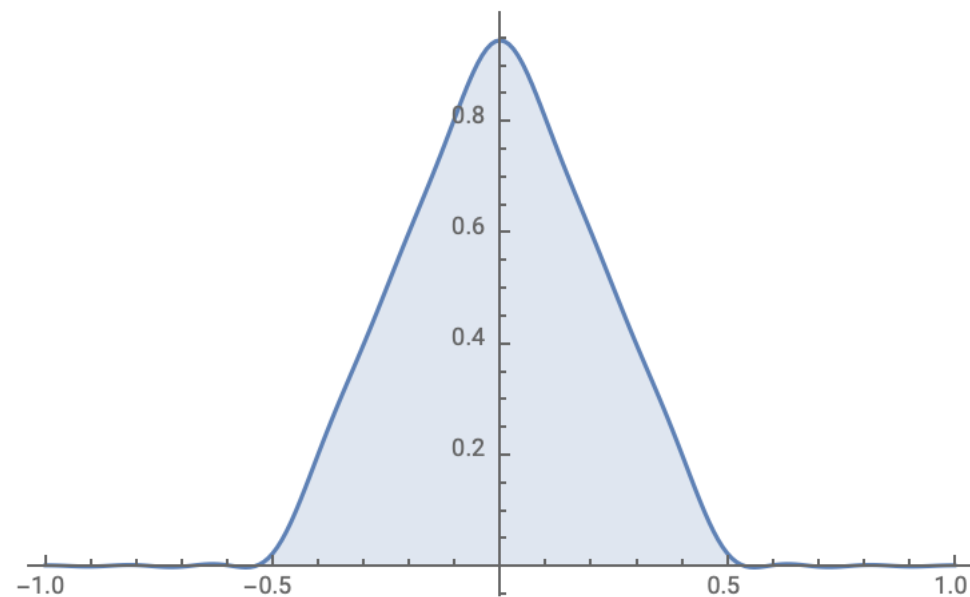
Восстановление сигнала

Для восстановления сигнала по $\xi'_{h'}(j)$
воспользуемся Теоремой Котельникова–Шеннона:

$$\xi'(t) = \sum_{j=1}^{N'} \xi'_{h'}(j) \operatorname{Sinc}\left(\frac{\pi}{h'}(t - h'j)\right)$$

Подставив вычисленные значения, получаем графики:

$\xi'(t)$, $h' = h/4$ ($N = 11$)



$\xi(t)$

